INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

SESSION 1 9 8 5 — EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction.

C_n^k désigne le coefficient de t^k dans le développement de $(1+t)^n$.

Au II 2° c) et au III 3°, on admettra qu'on peut intervertir l'ordre des sommations.

****

I - Montrer que la fonction numérique f de la variable réelle et définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, admet un développement en série entière dont on indiquera le rayon de convergence R .

Déterminer les réels α_n tels que, pour tout t de l'intervalle $]-R, +R[$ on ait $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$

****

II - X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1 \ ; \ +1\}$ avec les probabilités $p(X=1) = p(X=-1) = \frac{1}{2}$.

On définit une suite de variables aléatoires X_i ($i \in \mathbb{N}$), indépendantes et de même loi que X. On pose $S_0=0$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

M est un point mobile sur un axe $(O, \vec{i})$. A l'instant k ($k \in \mathbb{N}$), il a pour abscisse la valeur prise par S_k.

II - 1° - Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $p(S_n = 0)$.

Donner, en fonction de t réel tel que $|t| < 1$, une valeur simple de l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \ p(S_n = 0)$.

II - 2° - Pour ($k \in \mathbb{N}$) soit T_k la variable aléatoire prenant comme valeur l'instant, s'il existe, du k-ième retour à l'origine du point mobile M (c'est-à-dire : $T_{k+1} = \inf\left\{2n \ \middle| \ (n \in \mathbb{N}) \ (2n > T_k) \text{ et } (S_{2n} = 0)\right\}$) et, dans le cas contraire, la valeur -1 (c'est-à-dire ($T_{k+1} = -1$) si et seulement si : ($T_k = -1$) ou si l'ensemble $\left\{2n \ ; \ n \in \mathbb{N} \ | \ (2n > T_k) \text{ et } (S_{2n} = 0)\right\}$ est vide). On pose $T_0 = 0$. On admet que la probabilité $p(T_1 = -1)$ est nulle.

II - 2° - a) Montrer que $p(S_{2n} = 0) = \sum_{k=0}^{n} p(T_k = 2n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour k entier naturel fixé et t réel tel que $|t| < 1$, étudier la convergence absolue de la série de terme général $x_n = t^{2n} \ p(T_k = 2n)$.

Etudier de même, pour k décrivant $\mathbb{N}$, la nature de la série de terme général $y_k = \sum_{n=k}^{\infty} t^{2n} \ p(T_k = 2n)$.

c) Prouver que $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} t^{2n} \ p(T_k = 2n) \right) = f(t)$.

II - 3° - On admet que les intervalles de temps séparant 2 passages consécutifs à l'origine du mobile M sont indépendants en probabilité et de même loi que T_1.

Pour m entier naturel, supérieur ou égal à 1, on pose $T_m - T_{m-1} = I_m$.

a) Montrer que, pour $m \geqslant 1$, les variables aléatoires t^{I_m} sont indépendantes.

b) Comparer les espérances mathématiques $E(t^{T_k})$ et $E(t^{T_1})$.

En déduire l'égalité $\sum_{n=k}^{\infty} t^{2n} \ p(T_k = 2n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \ p(T_1 = 2n) \right)^k$, et une expression simple de $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \ p(T_1 = 2n)$ pour $|t| < 1$.

c) Que peut-on dire de la probabilité $p(T_k = -1)$ pour $k \geqslant 1$?

Calculer $p(T_1 = n)$ pour tout entier naturel n.

****

III - Pour $n \geqslant 1$, U_n est la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de zéros obtenus dans la suite des valeurs prises par $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$. On pose $U_0 = 1$.

III - 1° - n et k étant des entiers naturels non nuls, comparer les événements $(U_n = k) \cap (S_n = 0)$ et $(T_k = n)$.

III - 2° - Montrer que l'espérance conditionnelle $E\left(U_{2n} \ / \ (S_{2n} = 0)\right)$ existe et est égale à $\frac{\sum_{k=1}^{n} k \ p(T_k = 2n)}{p(S_{2n} = 0)}$ pour $n \geqslant 1$.

III - 3° - Pour $|t| < 1$, étudier la convergence absolue de la série de terme général $z_n = t^{2n} \ p(S_{2n} = 0) \ E\left(U_{2n} / (S_{2n} = 0)\right)$.

Prouver l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\sum_{n=k}^{\infty} t^{2n} \ p(T_k = 2n) \right)$.

Exprimer cette somme par des fonctions élémentaires de t.

III - 4° - En déduire que $E\left(U_{2n} / (S_{2n} = 0)\right) = \frac{2^{2n}}{C_{2n}^n} - 1$ pour $n \geqslant 1$.

****

IV - Une urne contient n jetons blancs et n jetons noirs. Un joueur tire les jetons de l'urne, un à un, sans remise. Avant chaque tirage, il parie sur la couleur. S'il devine juste, il marque un point, sinon il marque zéro point. On suppose que les tirages des jetons qui restent dans l'urne sont équiprobables.

On désigne par V_n le nombre des points marqués après les 2n tirages.

IV - 1° - Le joueur décide d'opérer de la manière suivante :

S'il y a égalité des couleurs dans l'urne, il parie au hasard ; dans le cas contraire, il désigne la couleur des jetons les plus nombreux dans l'urne.

Soit W_n le nombre des choix au hasard et Y_n le nombre total des points marqués lors de ces choix.

a) Que peut-on dire des paris séparant deux égalités successives des couleurs dans l'urne ? Montrer que $V_n = n + Y_n$.

b) Prouver que $E(Y_n) = \frac{1}{2} E(W_n)$. En déduire $E(V_n)$.

IV - 2° - En utilisant le résultat du III, calculer $E(W_n)$.

En prenant comme valeur approchée de n! le nombre $e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ pour $n \geqslant 50$, donner une estimation numérique de $E(V_{50})$.

IV - 3° - Est-il possible de choisir une stratégie de jeu conduisant à une espérance mathématique plus élevée que celle trouvée ?